

Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

O eletromagnetismo clássico representou uma unificação dos fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos dentro de uma estrutura conceitual e matemática robusta. Essa unificação se expressa por meio das equações de Maxwell, que relacionam cargas, correntes e campos variáveis no tempo e no espaço. Elas permitem explicar o surgimento dos campos elétricos e magnéticos, como eles se induzem mutuamente e como se propagam no espaço na forma de uma onda eletromagnética identificada como luz. Acrescidas da força de ~~força~~ Lorentz, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, elas possibilitam a descrição completa dos fenômenos envolvendo uma carga q movendo-se à velocidade $\vec{v}$ no que tange à sua dinâmica sob a ação de campos eletromagnéticos.

No vácuo, no sistema internacional de unidades (SI), as equações de Maxwell na forma integral (global) se escrevem como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Em ordem de aparecimento, temos:

- Lei de Gauss elétrica: relaciona o fluxo elétrico sobre uma superfície fechada S com a distribuição de cargas interna Q_{int} .

- Lei de Gauss magnética: expressa a ausência de monopolos magnéticos como fonte do fluxo magnético.

- Lei de Faraday: relaciona a circulação do campo elétrico em um circuito com o fluxo magnético variável no tempo.

- Lei de Ampère-Maxwell: relaciona a circulação do campo magnético em um circuito com a corrente de condução I_C e com o termo $\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ devido



a Maxwell, conhecido como corrente de deslocamento, e ligado à variação temporal do fluxo do campo elétrico.

Essas podem ser também expressas na forma diferencial (local) fazendo-se uso dos teoremas de Gauss-Ostrogradsky e de Stokes do cálculo vetorial. Assim, considerando que

$$Q_{int} = \int_V \rho \, dV, \quad \text{onde } \rho \text{ é a densidade de carga e } dV \text{ o elemento de volume}$$

$$I_c = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \text{onde } \vec{J} \text{ é o vetor corrente e } d\vec{A} = \hat{n} \, dA \text{ um elemento de superfície com normal orientada para fora; } d\vec{A} = \hat{n} \, dA,$$

segue que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

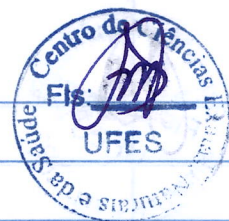
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

onde $\vec{\nabla} \cdot$ expressa a divergência e $\vec{\nabla} \times$ exprime o rotacional.

DQF1242025-08



Tomando-se a divergência da equação de Ampère-Maxwell na forma diferencial, vem:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t}$$

e notando-se que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, bem como fazendo-se uso da lei de Gauss elétrica na forma diferencial, chega-se à equação de continuidade, dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

que permanece válida no eletromagnetismo clássico devido à inclusão do termo de Maxwell $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$, caso contrário teríamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, de modo que não haveria conservação para distribuições de cargas não estacionárias. Esta situação está presente no carregamento de um capacitor elétrico, onde entre as placas $\vec{J} = \vec{0}$ mas $\partial \vec{E} / \partial t \neq 0$.

Em meio materiais as equações de Maxwell se escrevem como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{livre}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{livre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

onde $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ é o vetor deslocamento, $\vec{P}$ é o vetor polarização, ρ_{livre} é a densidade de cargas livres, $\vec{J}_{\text{livre}}$ é a densidade de corrente de cargas livres e $\vec{H}$ o campo magnético aplicado.

No vácuo e na ausência de fontes, tem-se:

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = \vec{0}$$

de modo que as equações de Maxwell se exprimem na forma:



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando-se o rotacional da equação de Faraday, vem:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$\text{Mas } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \text{ então}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}$$

em que ∇^2 denota o laplaciano.

Portanto, substituindo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ advindo da lei de Gauss elétrica e $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ advindo da lei de Ampère-Maxwell, somos levados à expressão

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Analogamente, para $\vec{B}$ encontra-se:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

equações de onda para velocidades dadas por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

A coincidência desse valor de c com a velocidade da luz no vácuo através de rigorosos experimentos levou os físicos à conclusão de que a luz é uma onda



eletromagnéticas.

Podemos encontrar uma solução na forma de ondas planas harmônicas:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t),$$

onde $\vec{k}$ é o vetor de onda e $\omega = c k$ a frequência de oscilação.

Da divergência somos levados à transversalidade dos campos elétrico e magnéticos. Para $\vec{E}$, temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Rightarrow -(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

Analogamente, para $\vec{B}$: $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$

De modo que $\vec{k} \perp \vec{E}_0$ e $\vec{k} \perp \vec{B}_0$.

~~Derivando~~ Tomando o rotacional dos campos, vem:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \Rightarrow (\vec{k} \times \vec{E}_0) \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \Rightarrow E_0 = c B_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \Rightarrow (\vec{k} \times \vec{B}_0) = \mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}_0, \quad \text{que também conduz a } E_0 = c B_0.$$

Assí, depreende-se que $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$ formam uma tríade ortogonal, com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilando em fase e propagando-se na direção $\vec{k}$. Note que: $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$.

As ondas eletromagnéticas também transportam energia, cuja densidade de energia u é dada por:



$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

onde no caso de ondas planas e no vácuo: $u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

Além disso, o fluxo do campo eletromagnético é dado pelo vetor de Poynting $\vec{S}$, dado por:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

e pode-se mostrar fazendo-se uso das equações de Maxwell e de identidades do cálculo vetorial que u e $\vec{S}$ obedecem a uma lei de conservação na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

em que o último termo expressa a ~~pot~~ densidade de potência entregue pelos campos às cargas.

A intensidade da radiação eletromagnética I é dada pelo valor médio temporal do valor de Poynting. Assim,

$$I = \langle S \rangle$$

Diante de todas essas considerações, é ~~impossível~~ ^{se} impossível não admirar com o alcance descritivo e sucinto obtido com a formulação das equações de Maxwell, que permitiram unificar campos de estudo aparentemente desconexos, bem como explicar o fenômeno da propagação da luz e sua velocidade. A síntese maxwelliana não foi apenas matematicamente elegante mas fisicamente rigorosa e propiciou uma



Série de avanços no âmbito tecnológico, de modo que se pode dizer que a sobrevivência e conforto das sociedades humanas em todo o globo dependem do significado trazido por essas quatro equações.