

① Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

As equações de Maxwell foi uma das grandes descobertas do século XIX, formando um dos arcabouços teóricos mais importantes da física, pois, além de unificar os fenômenos elétricos e magnéticos, prever que a luz é uma onda, dando uma nova interpretação ao que se entendia sobre a propagação da luz, ainda serviu de base para novas teorias que posteriormente se ficou conhecida como física moderna.

A teoria de Maxwell surgiu quando James Clerk Maxwell unificou as teorias/perquisas escritas por Ampère, Gauss, Faraday, dentre outros, formando um conjunto de quatro equações. A primeira equação conhecida como Lei de Gauss, vide a equação (1):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

onde, $\vec{E}$ é o vetor campo elétrico, $d\vec{S}$ o vetor superfície, Q é carga do objeto que está sendo estudado pode ser pontual ou cilindro ..., e ϵ_0 é a permissividade no vácuo cujo valor é $8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Vm}^2$. Esta equação mostra como o campo $\vec{E}$ é gerado ~~por~~ ponto a ponto no espaço, a partir de uma carga elétrica. A superfície referente ao $d\vec{S}$, é denominada de ~~superfície~~ superfície gaussiana, é uma superfície fechada que na qual ~~se~~ a carga fica em seu interior. É bastante utilizada para facilitar o cálculo do campo $\vec{E}$.

Existe um outro formalismo para a equação (1) o formato diferencial. Para encontrá-lo vamos utilizar o teorema da divergência.



$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} d\vec{s} \quad (2)$$

aplicando o teorema (2) em (1), temos:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3)$$

da definição de densidade de carga, temos:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho dV, \text{ integrando}$$

$$\int dQ = \int \rho dV,$$

$$\text{logo, } Q = \int \rho dV \quad (4)$$

substituindo a equação (4) em (3), temos:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Logo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

a equação (5) é a lei de Gauss no formato diferencial, ela mostra que a variação do campo elétrico sobre o ponto no espaço depende da densidade de carga.

A segunda equação é a lei de Gauss para o magnetismo e é escrita da seguinte forma:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (6)$$

onde, $\vec{B}$ é o ~~campo~~ vetor campo magnético. Esta

equação mostra a impossibilidade de existir o monopolo magnético, comprovando que as linhas de campo magnético são fechadas dentro da superfície gaussiana, o que difere do $\vec{E}$ que possui linhas divergentes. A não existência do monopolo magnético mostra que acontece quando um ímã se quebra, ou seja, a formação de dois novos ímãs com polo Norte (N) e polo Sul (S).

A equação (6), da mesma maneira que a equação (1) pode ser escrita no formato diferencial, para isso vamos aplicar o teorema da divergência, a equação (2), na equação (6).

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Logo,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7)$$

A terceira equação é conhecida como Lei de Faraday, ~~está dada, ou seja~~ a equação (8) como é escrita esta lei:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (8)$$

onde, Φ_B é o fluxo magnético através de uma superfície. Esta equação mostra que a variação do fluxo magnético gera um campo elétrico ($\vec{E}$). A equação (8) também pode ser escrita em um formato diferencial, para isso é necessário utilizar o teorema de Stokes, equação (9)

~~$$\oint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$~~

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (9)$$

Aplicando o teorema (9) em (8) temos:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (10)$$

da definição de fluxo magnético temos:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS \text{ - integrando omisso os lados}$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS \quad (11)$$

substituindo (11) em (10), vamos encontrar:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

logo,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12)$$

A equação (12) é o formato diferencial da equação (8), a lei de Faraday, ela mostra que a variação do campo magnético ($\vec{B}$) gera $\vec{E}$, o que é de fundamental importância para transmissão de ondas.

A quarta equação é conhecida como lei de Ampère-Maxwell, e dada pela equação a seguir:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \left(\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right) \mu_0 \epsilon_0 \quad (13)$$

Esta equação mostra que o fluxo magnético elétrico (Φ_E) quando

varia gbra um $\vec{B}$, e esta também associada a propagação de ondas. Para escrever a equação (13) em um formato diferencial, vamos aplicar o teorema (9) na equação (13), da seguinte forma:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} d\vec{s} = \int_C B d\vec{l} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

de forma que:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \quad (14)$$

da definição de fluxo elétrico (Φ_E) temos:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{integrando ambos os lados:}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (15)$$

substituindo (15) em (14) temos:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \right)$$

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (16)$$

da definição de densidade de corrente $\vec{j}$ temos:

$$\vec{j} = \frac{di}{d\vec{s}} \quad \Rightarrow \quad di = \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad \text{integrando ambos os lados}$$

$$I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (17)$$

substituindo (16) em (17) temos:



$$\int_S \nabla \times \vec{B} \, d\vec{s} = \int_S \mu_0 \vec{j} \, d\vec{s} + \int_S \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, d\vec{s}$$

logo,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (18)$$

A equação (18) ~~é~~ a lei de Ampère-Maxwell, ou lei de Ampère generalizada, mostra que a variação de $\vec{E}$ gera uma rotação no campo magnético, ou simplesmente a variação de $\vec{E}$ gera $\vec{B}$. O nome é Ampère-Maxwell pois Ampère encontrou ~~uma~~ a equação (13) sem o termo $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ encontrado por Maxwell, Ampère não percebeu

este termo pois ele só aparece ~~em~~ com campos $\vec{E}$ de alta frequência, pois se tornando um termo de valor muito pequeno ~~($\mu_0 \epsilon_0 \ll 1$)~~ $\mu_0 \epsilon_0 \ll 1$, a multiplicação da permeabilidade μ_0 pela ϵ_0 é ~~um~~ um valor muito pequeno. A equação (18) mostra o princípio dos transformadores, geradores, motores elétricos etc.

As ondas eletromagnéticas podem ser encontradas a partir das equações de Maxwell. Para isso vamos tirar o gradiente da equação (18)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \quad (19)$$

usando a relação (20):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (20)$$

temos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$\epsilon_0 = 0$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (21)$$

substituindo a equação (18) em (21) temos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Não tem corrente

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (22)$$

Vamos agora fazer o gradiente da equação (18)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\mu_0 \vec{J}) + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t} \quad (23)$$

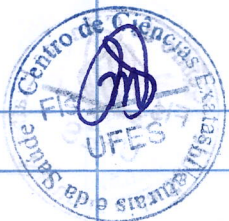
usando a relação (20) em (23) temos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{logo } \nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}}{\partial t} \quad (24)$$

substituindo a equação (12) em (24), vamos encontrar:

$$\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$



$$\text{logo}, \nabla^2 B = \left(\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right) \mu_0 \epsilon_0 \quad (25)$$

A equação da onda em três dimensões é dada por:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (26)$$

quando comparamos as equações (25) e (22) com a (26), podemos ~~a~~ afirmar que encontramos as equações para as ondas ~~elétricas e magnéticas~~ eletromagnéticas.

(25) é equação da onda para o campo $\vec{B}$ e (22) para o campo $\vec{E}$, e mais uma comparação temos que:

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \Rightarrow c^2 = \mu_0 \epsilon_0$$
$$c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$c \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{velocidade da luz no vácuo})$$

O cálculo de c mostra a comprovação que a luz é uma onda eletromagnética, e o valor encontrado é uma das constantes mais importantes da física.

As equações de Maxwell como dito anteriormente forma a base para a física moderna, teoria quântica... e mostra a união de fenômenos magnéticos, elétricos e ópticos. Outro fator importante é que se a propagação quando $\frac{\partial E}{\partial t}$ e $\frac{\partial B}{\partial t}$ são diferentes de zero, veja equações (25) e (22).

No campo dos pesquisas científicas é muito importante pois mudando a frequência de propagação, veja (25) e (22), vários espectros de ondas eletromagnéticas são encontrados, como raios X, infravermelho, muito utilizados para caracterizar

CÓDIGO: DAF1242025-10



amortas, também podemos encontrar espectros como a luz visível, ultra violeta entre outros. Assim podemos afirmar que as luz quânticas de Maxwell são muito importantes para física teórica, experimental, e para a tecnologia, engenharia. Um espectro muito presente no cotidiano é o de microondas, que ~~foram~~ ~~estão~~ nos aparelhos utilizados nas casas das pessoas para aquecer alimentos e comprimentos de ondas grandes. Estas ondas geradas a partir de um eletroímã denominada magnetron, fazem os moléculas de água se agitarem e por consequência aquecer os alimentos.