

Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

As quatro equações de Maxwell descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético e são um marco histórico de grande importância para a física clássica, dado o seu impacto tanto na estrutura da física teórica quanto em aplicações tecnológicas. Embora alguns fenômenos elétricos e magnéticos tenham sido observados desde a antiguidade, somente no séc. XIX nomes como Faraday, Ampère e outros estabeleceram conexões entre esses fenômenos através de investigações experimentais. Coube então a Maxwell, em meados de 1860, estabelecer o arcabouço matemático da teoria eletromagnética, que além de mostrar as relações intrínsecas entre os campos elétrico e magnético, unificou também a ótica ao eletromagnetismo, ao mostrar que a luz e todas as radiações hoje chamadas de espectro eletromagnético têm a mesma natureza. Assim, dado o impacto dessas descobertas na geração e distribuição de energia, telecomunicações, imageamento e outras diversas aplicações, não seria exagero dizer que essas descobertas foram tão importantes para a física quanto como para a sociedade em geral.

A primeira das equações é a lei de Gauss, que estabelece a conexão entre o campo eletrostático e a sua fonte, as cargas elétricas:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

O integral à esquerda é a definição do fluxo das linhas do campo elétrico $\vec{E}$ sobre a superfície fechada S (sendo a superfície orientada, de forma que $d\vec{S} = \hat{n} dS$, e $\hat{n}$ é o vetor ^{da} versor normal externa à superfície), e do lado direito,



tem-se a carga elétrica Q_{int} (em coulombos C) interior à superfície S , e a constante $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ é a permissividade elétrica do espaço livre. A interpretação física dessa lei é a de que o número de linhas de campo atravessando uma superfície fechada só depende da carga total contida no interior da superfície. A lei pode ser também expressa na sua forma diferencial, através do teorema de Gauss do cálculo vetorial e da definição de densidade de cargas, $dQ = \rho \cdot dV$, e assim

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

passa a ser

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \iiint_V \frac{\rho \cdot dV}{\epsilon_0}$$

ou

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0) \, dV = 0$$

Onde V é o volume da superfície fechada S , e assim

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (*)$$

Cuja interpretação, de que o campo $\vec{E}$ diverge na densidade de cargas ρ , é de que a carga elétrica é a fonte do campo elétrico. A lei de Gauss tem importantes aplicações, além de simplificar cálculos do campo $\vec{E}$ em situações com simetria geométrica, por meio do comportamento de cargas e campos elétricos em condutores, por exemplo, onde o campo $\vec{E}$ deve ser nulo no interior dos condutores e todas as cargas livres permanecendo na superfície do mesmo.

A próxima das equações é a equivalente da lei de Gauss para o campo magnético:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (3)$$

ou

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4)$$

equivalente pelo ~~teorema~~

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5)$$

Cuja interpretação é direta: não existem cargas ou monopolos magnéticos, e as linhas de campo magnético são sempre fechadas.

A fonte ou origem do campo magnético é estabelecida pela lei de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}} \quad (6)$$

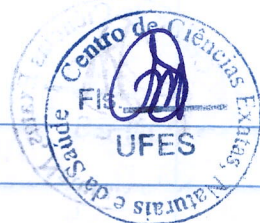
Onde à esquerda tem-se a integral de linha do campo $\vec{B}$ sobre uma curva fechada C , que é a fronteira de uma superfície qualquer S penetrada por correntes (para dentro ou para fora da superfície) cuja soma é I_{int} . A forma diferencial da lei é obtida com o auxílio do teorema de Stokes e da definição de densidade de corrente $\vec{J}$, dada por

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

de maneira que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (8)$$

DQF1242025-13





de forma que

$$\oint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

e assim

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (8)$$

Aqui, a constante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ é a permeabilidade magnética do vácuo.

Na forma diferencial, as (2), (5) e (8) tratam dos casos da eletrostática e magnetostática, onde as cargas são estacionárias e as correntes não variam no tempo, respectivamente. Existem, para esses casos, outras definições importantes que não podem ser aprofundadas aqui, por exemplo a do potencial elétrico $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$, ou $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, ambas garantidas pelo fato de que o campo $\vec{E}$ é conservativo e $\nabla \times \vec{E} = 0$, e o potencial magnético $\vec{A}$, tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, que garante a validade de (5).

A última das equações é a primeira que considera o caso da eletrodinâmica, i.e., campos variando no tempo. É a lei de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9)$$

Onde novamente C é uma curva fechada, fronteira da superfície S . A (9) também é pode ser expressa da forma

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (10)$$

(4) Co notar que Φ_B é a definição do fluxo do campo magnético sobre a superfície S , e $\mathcal{E}$ é uma diferença de potencial (d.d.p.) ou tensão chamada força eletromotriz

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \sin(k \cdot z - \omega \cdot t + \phi) \quad (15)$$



Com as definições usuais da física ondulatória,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} ; \omega = 2\pi \cdot \nu ; \frac{\omega}{k} = c ; \vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

Sendo k o número de onda, λ o seu comprimento, ω e ν a frequência angular e frequência, respectivamente. Uma relação similar é obedecida por $\vec{B}$, por definição. Como comentado, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ obedecem a equação de onda e também as de Maxwell. Por exemplo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ aplicadas em (15) permitem concluir que E_{0z} e B_{0z} são nulas necessariamente. Assim, as ondas eletromagnéticas são transversais: os campos oscilam em um plano perpendicular à direção de propagação.

Similarmente, o operador $\vec{\nabla} \times$ nas leis de Ampère e Faraday impõe que os campos sejam perpendiculares entre si; as derivadas de primeira ordem indicam que ambos estão em fase. Por fim, a generalização de (15) para uma direção qualquer é

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \phi) \hat{n} \quad (16)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \phi) \vec{k} \times \hat{n}$$

Onde $\hat{n}$ é o vetor de polarização da onda, este por si só a origem de várias aplicações no campo da ótica, como filtros, entre outros.

Detrás os vários resultados que poderiam ser demonstrados está o teorema de Poynting. (9)



$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{S} \quad (17)$$

onde

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \vec{E} \quad (18)$$

$\vec{S}$ é o vetor de Poynting, em W/m^2 , que aponta na direção de propagação da onda e mede o fluxo de energia por tempo em uma área. Na relação (17)

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S} \quad (19)$$

que é a conservação de energia U do campo eletromagnético. O teorema tem importantes aplicações no estudo da ótica, guia de ondas, antenas, entre outros.

As equações de Maxwell e suas consequências transformaram a física, estabelecendo as fundações para avanços posteriores como a teoria da relatividade e a mecânica quântica, sendo assim um dos pilares da física clássica, cujas aplicações tecnológicas transformaram o modo de vida e a sociedade, justificando assim a sua importância dentro da física.

(pelo seu papel como fonte de energia em circuitos).

É interessante notar a diferença com o caso eletroestático, onde $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Aqui, na eletrodinâmica, $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ é gerada pela taxa de variação temporal do fluxo eletromagnético. A forma diferencial de (9) e (10) é

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

de forma que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (11)$$

○ sinal de (-) no lado direito (9), (10) ou (11) é tão importante que tem um nome a parte: a lei de Lenz. Ela garante que a corrente induzida por $\mathcal{E}$ em um circuito tem um sentido tal que se opõe à variação do fluxo de $\vec{B}$, em seu campo campo magnético induzido. Dessa forma, é necessária a ação de um trabalho externo que gere a variação do fluxo magnético, garantindo a conservação da energia.

As equações (2), (5), (8) e (11) são as equações à época do trabalho de Maxwell. Outras leis não foram discutidas aqui, que fazem parte e proporcionam testes de compatibilidade da teoria, como a lei de Coulomb que leva a (2), a lei de Biot-Savart que leva a (8) e a lei de força de Lorentz em conexão com a (11). Foi justamente em um teste de compatibilidade como esse que Maxwell modificou a (8) com grandes consequências.

O princípio da conservação da carga elétrica impõe que a quantidade de carga saia de um volume

$$-\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot dV \quad (5)$$

DQF 1242025-13



deve ser igual a corrente fluindo para dentro da superfície S

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV$$

e igualando as expressões:

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} \iiint \rho \cdot dV = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dV$$

o que leva a equação da continuidade

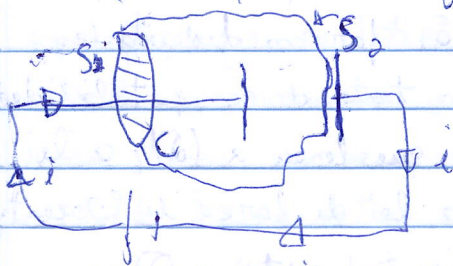
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (12)$$

E o problema é que a aplicação do ~~teorema~~ ^{divergente} a (8) leva a

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

já que em geral, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ para qualquer $\vec{V}$. Isso já sugere que (8) deve ser modificada para um contexto além da magnetostática.

O mesmo problema e suas consequências podem ser observados no problema de carga de um capacitor, ~~colocado~~ colocado na figura abaixo, onde a aplicação da



lei de Ampere na curva C leva a dois resultados diferentes, se considerarmos a superfície S_1 fechada (atravessada pela corrente) e a superfície "bolha" S_2 , não atr-

essada pela mesma. Os resultados deveriam ser iguais, pois o teorema de Stokes garante que qualquer S pode ser usada.

Embora as motivações de Maxwell à época fossem outras, o problema pode ser corrigido naturalmente, considerando a realidade tanto de (8) como

(6)

de (12) e usando a lei de Gauss (2), Assim

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

o que sugere que

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

e que o termo $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ se comporta como uma corrente, chamada de corrente de deslocamento $\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Assim, a correção na (8) é

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13)$$

chamada de Lei de Ampere-Maxwell. A corrente $\vec{J}_d$ normalmente é desprezível em relação a $\vec{J}$, quando ambas presentes, por isso não foi detectada experimentalmente à época. Porém, quando considerada isoladamente, resolve o problema da carga do capacitor acumulada na superfície S_d , entre as placas, onde só há $\vec{J}_d$.

Porém, essa não foi a maior consequência da correção na lei de Ampere. Considerando agora as 4 equações na região,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (i) \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (ii)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (iii) \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (iv)$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

(7)



e usando as (i) e (iii)

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0 = \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

e agora a (iv)

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

com o mesmo processo sendo repetido para o campo $\vec{B}$, usando a identidade, depois (ii) e (iv) e por fim (iii), levando às duas equações para $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

que tem o mesmo formato das equações de uma onda ~~três~~ tri-dimensional, com velocidade de propagação $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ que coincide com a velocidade da luz, já medida à época, o que levou Maxwell a concluir que a luz é uma onda dos campos elétrico e magnético, que se propaga obedecendo as equações de Maxwell.

Curiosos mais tarde, a descoberta foi confirmada por Hertz que produziu e detectou ondas de rádio usando um circuito elétrico, provando que não apenas a luz, mas outras radiações têm a mesma natureza, abrindo caminho para o estudo do espectro eletromagnético.

O estudo das ondas eletromagnéticas constitui uma área ampla que por questão de tempo, não é aprofundada aqui. Da física ondulatória sabe-se que uma onda propagando-se na direção z deve ser descrita por uma função $F(z - vt)$. Considerando o caso mais simples, de uma onda plana, senoidal e monocromática, o seu campo elétrico é descrito por:

(8)