



Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas.

No início do século XIX os fenômenos elétricos e magnéticos eram descritos por equações isoladas. As descrições eram dos experimentos realizados por Coulomb, que deu origem a Lei que descrevia a força de interação entre cargas elétricas, o experimento de Faraday sobre a indução de campo elétrico ($\vec{E}$) a partir da variação temporal do campo magnético e o experimento de Oersted que aplicou uma corrente em um fio condutor e quando próximo ao fio uma bússola defletia a sua ~~agulha magnética~~ agulha magnética, esta relação foi matematizada por Ampère.

Assim, a partir dessas descrições, Maxwell ~~os ^{organizar} ~~descrever~~~~ em um conjunto de quatro equações que descreveram todos os fenômenos eletromagnéticos. Além disso, Maxwell percebeu uma falha na Lei de Ampère quando se tratava de campos variáveis no tempo. Diante disso, Maxwell propôs uma correção que se mostrou fundamental.

A partir dessas equações, Maxwell redotou a demonstração das ondas eletromagnéticas, concluindo que as ~~for~~ ondas não precisavam de um meio para se propagar, ou seja, se propagavam no vácuo. E também que a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com uma velocidade constante,



determinada por meio de duas constantes universais. Além disso, foi possível demonstrar algumas propriedades das ondas eletromagnéticas.

A primeira das ~~três de Maxwell~~ equações de Maxwell, trata sobre as fontes de campo elétrico ($\vec{E}$), conhecida como Lei de Gauss para o campo elétrico. A primeira descrição da interação entre cargas elétricas é a Lei de Coulomb, que determina a força de interação entre duas cargas elétricas a uma distância r , dada por:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, e $\hat{r}$ é o vetor, as cargas são q_1 e q_2 . Pela superposição, obtém-se o campo elétrico a uma distância de uma carga elétrica q ; dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

É necessário definir o fluxo de campo elétrico (Φ_E) através de uma superfície. As linhas de campo $\vec{E}$ emanam de uma carga elétrica, podem ser contabilizadas por meio de fluxo, dado por:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

onde $d\vec{A}$ é o vetor elemento de área da superfície e está apontado para fora e é atravessado

do por linhas de campo $\vec{E}$. Considerando
uma carga q no centro de uma superfície
fechada "S" de área A .

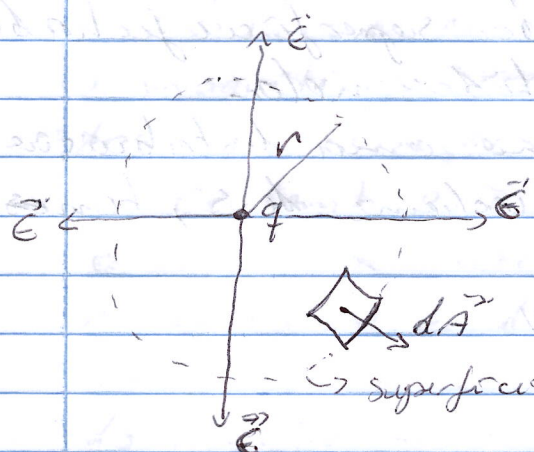


Figura: Carga pontual q
no centro de uma
superfície "S" emanando
linhas de campo $\vec{E}$

na equação de fluxo (Φ_E), o produto escalar
entre $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ ($\vec{E} \cdot d\vec{A}$) seleciona as componentes
perpendiculares da ~~campo~~ campo $\vec{E}$ à superfi-
cie "S". Portanto, o fluxo de campo elétrica
através de "S" é dado por:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Agora, considerando um conjunto de cargas
($q_1, q_2, q_3, \dots$) contidas dentro da superfície "S",
considerando o princípio de superposição
do campo elétrico, tem-se:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

onde, Q_{int} representa a soma total de todas as
cargas q envolvidas por "S". Note que o fluxo
de $\vec{E}$ é independente de da área (A) da superfi-
cie fechada. Pode-se estender este entendimento.



para qualquer superfície fechada, desde que a superfície envolva todas as cargas. Portanto, o fluxo de $\vec{E}$ (Φ_E) não depende da ~~superfície~~ ~~apenas da sua~~ forma da superfície fechada, apenas das cargas contidas nela.

Considerando Q_{int} como uma distribuição de densidade de cargas no volume de S , temos-se

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV$$

onde ρ é a densidade volumétrica de cargas. Portanto, a forma integral da Lei de Gauss elétrica é:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV$$

esta é a forma global da Lei de Gauss.

Apliquemos o teorema da divergência (ou teorema de Gauss), que transforma o fluxo de um campo ($\vec{E}$) através de uma superfície fechada S na divergente desse campo no volume delimitado por S , temos-se:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV$$

os integrandos são iguais para qualquer ~~superfície~~ volume arbitrário. Portanto, a forma local, diferencial da Lei de Gauss é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Portanto, a Lei de Gauss descreve que as fontes de campo elétrica são as cargas, que cargas positivas são fontes de campo elétrico, sendo proporcional a carga. Além disso, a divergente de $\vec{E}$ em um local é proporcional a densidade de carga naquele local.

A segunda equação de Maxwell, é também considerada em alguns livros, com a Lei de Gauss magnética. Esta, por sua vez, descreve a inexistência de monopólos magnéticos (ao menos não foram observados até o momento).

Considerando uma barra que foi dividida, portanto a barra, ainda assim as partes serão ímãs. Com as linhas de campo $\vec{B}$ magnético ($\vec{B}$) saindo do polo Norte (N) e entrando no Sul (S), ou seja, linhas de campo fechadas, conforme Figura abaixo.

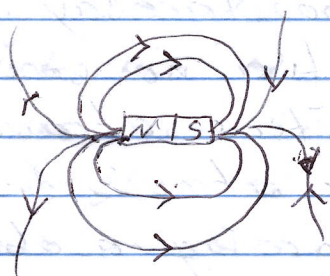


Figura: Ilustração de um ímã com as linhas de campo $\vec{B}$.

Considerando uma superfície fechada S que envolva o ímã, as linhas de $\vec{B}$ que saem representam um fluxo de $\vec{B}$ (Φ_B) positivo e as linhas de $\vec{B}$ que entram representam um fluxo de $\vec{B}$ (Φ_B) negativo. Logo, o fluxo líquido de $\vec{B}$ através da superfície fechada S é nulo.



Portanto, o fluxo Φ_B é representado por

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Logo, não existe um fluxo líquido de $\vec{B}$ através de S , representado pela forma integral da Lei de Gauss para $\vec{B}$.
Aplicando o teorema de Poynting, obtém-se a forma diferencial da Lei de Gauss para $\vec{B}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Portanto, conforme a inexistência de monopolos magnéticos, é evidente a natureza solenoidal do campo magnético. ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). Não havendo fontes nem sumidouros de campo magnético.

A terceira das quatro equações de Maxwell é a Lei de Faraday. Surge da a partir de um experimento realizado por Faraday no início do século XIX. Que consistia no varrer de um fluxo de campo magnético através de um espiral condutora, fluxo através da área, conforme a ilustração na figura abaixo.

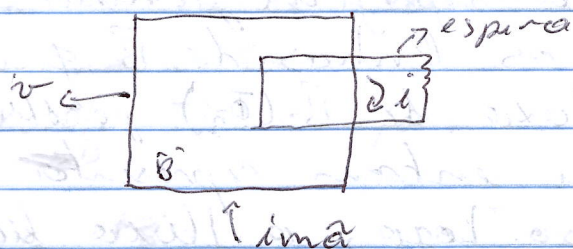


Figura: ilustração do experimento realizado por Faraday, movendo um arame com velocidade constante v .



Ao mexer no ímã, para frente e para trás, Faraday percebeu que uma corrente elétrica (i) circulava pela espiral. Ou seja, existia um campo eletromotriz induzido ($\mathcal{E}$) ~~pela~~ pela variação do fluxo de campo magnético (Φ_B) através da área delimitada pela curva fechada C da espiral. Logo, o fluxo é:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

onde S é delimitada pela curva da espiral.

A relação do campo eletromotriz ($\mathcal{E}$) com a variação temporal de $\vec{B}$ é:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

o sinal negativo se deve pela Lei de Lenz. Que significa que o campo $\vec{B}'$ gerado pela corrente (i) se opõe a variação do fluxo de $\vec{B}$ através da espiral.

A relação de $\mathcal{E}$ com a circulação de $\vec{E}$ (campo elétrico) na curva C (espiral) é dada por:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde $d\vec{l}$ é um elemento da curva C orientada. A partir destas relações, obtém-se a famosa integral da Lei de Faraday.

Logo,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Portanto, a ~~variação~~ variação temporal $\vec{B}$ através de S gera uma circulação de $\vec{E}$ na curva C .

Aplicando o teorema de Stokes, onde a circulação do campo $\vec{E}$ em C é igual ao rotacional de $\vec{E}$ através de S .

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

os integrandos são iguais para qual quer superfície arbitrária, logo, a forma diferencial da Lei de Faraday é

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Portanto, Faraday concluiu que a variação temporal do campo magnético gera um campo elétrico rotacional.

A quarta equação de Maxwell é a mais complexa delas. Originalmente, descrita por Ampère, que é descrita da seguinte forma.

Considerando um fio condutor com uma corrente (I), conforme ilustração.

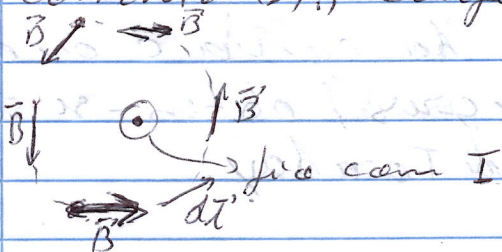


Figura: ilustração de fio com corrente I e o campo $\vec{B}$ circulando ao seu redor.

O campo magnético a uma distância r gerado por uma corrente I é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

A circulação de $\vec{B}$ na curva amperiana, curva imaginária imersa em $\vec{B}$, é:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente através de S . Portanto, esta é a Lei de Ampère original na forma integral.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Aplicando o teorema de Stokes, temos a forma local, diferencial.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Esta equação é válida apenas na magnetostática, onde os campos não variam com tempo.

Porém, Maxwell percebeu que esta equação não era válida sob certas condições. Pois esta violava a equação da continuidade.



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Aplacando o divergente na lei de Ampère original, ~~obtemos~~ e considerando a propriedade vetorial, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$. Chega-se a conclusão que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

o que só é válido na ~~uma~~ ~~caso~~ ~~estática~~ ~~nária~~, ou seja campos que não variam no tempo.

Para recuperar a equação da continuidade, ~~maxwell~~ derivada a Lei de Gauss elétrica em relação ao tempo.

$$\frac{d(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

A partir da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Atribuímos a fonte de campo $\vec{B}$ como sendo essa grandeza $\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Onde $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ é a corrente de deslocamento ($\vec{J}_D$)

Portanto, a Lei de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pelo teorema de Stokes, tem-se a forma integral de Lii.



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A} + \int_S \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Portanto, esta equação é válida tanto para campos estáticos quanto para campos que variam no tempo. Corrigida por Maxwell.

Equações de Maxwell no vácuo,
 $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (i) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (iii)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (ii) \quad \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \right) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (iv)$$

Observe a simetria entre as equações (iii) e (iv):

Para desacoplar os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, aplique-se o rotacional em (iii)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}$$

~~(Pela lei de Lii)~~ Pela propriedade vetorial:
 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, Pela lei de Gauss (i), ~~tem-se~~ e pela eq (iv), tem-se
~~(Pela lei de Lii)~~ $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Portanto, obtém-se as equações da onda para o campo elétrico ($\vec{E}$)

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Comparando com a equação da onda padrão, para a caso unidimensional.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Portanto, $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$

este é o valor da velocidade da onda, que muito próximo do valor da velocidade da luz obtida experimentalmente na época de Maxwell, essa proximidade, o levou a concluir que a luz é uma onda eletromagnética. ~~(que se propaga)~~.

Pode-se chegar na equação para o campo $\vec{B}$ de forma análoga a $\vec{E}$.

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Portanto, a onda eletromagnética se propagava no vácuo, sem a necessidade do "éter", ideia que era vigente na época, ou seja, o "éter" seria um nada. Assim, a onda eletromagnética se propaga de forma auto sustentada pelos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

A onda eletromagnética possui a propriedade da transversalidade. Considerando ondas planas monocromáticas.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{k}) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Aplicando a Lei de Gauss em $\vec{E}$,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{k} \text{ e } \vec{E} \text{ são perpendiculares.}$$

Agora para o campo $\vec{B}$, aplicando a Lei de Gauss campo magnético.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{k} \text{ e } \vec{B} \text{ são perpendiculares por condição.}$$

Portanto, essa é a condição da transversalidade. As ondas eletromagnéticas se propagam na direção de $\vec{k}$.

Portanto, para concluir, as equações de Maxwell descrevem todos os campos eletromagnéticos e fenômenos de eletromagnetismo. A unificação feita por Maxwell foi ~~o passo~~ uma grande unificação na física reunindo eletromagnetismo e óptica. Mostrando que a luz é uma onda eletromagnética e que se propaga no vácuo de forma autossustentada pelos



campos elétrico e magnético com
direção de propagação no vetor $\vec{k}$,
sendo triplamente ortogonais $\vec{k} \perp \vec{B} \perp \vec{E}$.
Assim, mostra-se a importância da
correção de Maxwell na lei de Ampère,
sem a qual não seria possível alcançar
essas conclusões.

Ref.

Curso de Física Básica, 3, eletromagnetismo
Maysis Nusseltveig. 2013.

Eletrodinâmica, David Griffiths, 2011.