

DQF1042025 - 23



Em meados do século XIX, uma grande quantidade de experimentações empíricas começaram a acontecer com o intuito de testar os limites da eletricidade e magnetismo conhecidos na época.

Experimentos como os conduzidos por ~~Cavendish~~ Cavendish e Faraday possibilitaram estabelecer relações entre o magnetismo e a eletrodinâmica. Porém, as conclusões eram muitas vezes puramente descritivas e, nesse contexto, faltava uma descrição matemática mais precisa. Por fim, ainda existiam alguns fenômenos sem explicação completa, como a rotação de campo magnético em um capacitor em carga.

É nesse cenário que surge Maxwell, físico que tratou de introduzir de vez o conceito de campo da forma como ~~se~~ conhecemos hoje. Além disso, Maxwell lançou mão do formalismo do cálculo vetorial, ~~que~~ transformando o conhecimento da época em equações matemáticas consistentes.

Isso tudo o permitiu resolver alguns dos problemas da teoria e entender, de modo definitivo, a luz como uma onda eletromagnética.

Equação de Gauss

Era sabido na época que cargas geravam campos. Esse conhecimento foi sistematizado como

①



$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

onde ρ é a densidade de cargas.

Como ~~(A)~~ o divergente está associado ao surgimento de cargas que há o aparecimento de campo elétrico na presença de cargas.

Usando o teorema da divergência temos que

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \rightarrow \int \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ portanto } \boxed{\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

ⓐ

Lei de Gauss para o Magnetismo

Para o magnetismo, sabe-se experimentalmente que as linhas geradas por um ímã fecham no interior do próprio ímã. Assim, escreve-se que

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

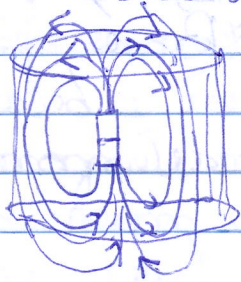
Isso representa inexistência de pontos de surgimento do campo magnético e, consequentemente de um monopolo magnético.

Na forma integral e novamente usando o teore-

mas da divergência:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{isto é, em uma}$$

região S , todo ~~que~~ campo que entra, também sai e vice-versa, de modo que o fluxo é nulo.



Todo campo que flui pelo topo do cilindro volta a entrar pelo de baixo.

Lei de Faraday - Lenz

Experimentos com imã mostraram na época que uma variação temporal do campo magnético gera também uma mensurável mudança no campo elétrico. Assim, em termos de forma de campo:

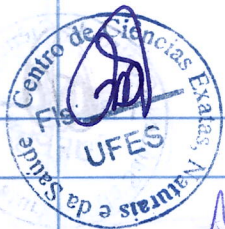
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

E na forma integral, considerando uma região de área S

$$\int \nabla \times \vec{E} d\vec{S} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

Com o teorema do rotacional:

$$\int \nabla \times \vec{E} d\vec{S} = \oint \vec{E} d\vec{l} \quad (2)$$



Mas temos que a integral ocorre em S por

$$\int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{S} = \frac{d}{dt} \Phi_B$$

já que o fluxo de um campo $\vec{B}$ é

$$\int \vec{B} d\vec{S}.$$

Assim, finalmente:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

, ou seja, a variação temporal do fluxo magnético gera um campo ao longo da linha l . Se for um fio, em l surge um para elemento igual a

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{l}$$

Lei de Ampere - Maxwell

O experimento de Oersted demonstrou que para um circuito com corrente variante no tempo ou estacionária, havia a formação de um campo magnético ao redor do fio, pois, este era capaz de mover o ponteiro de uma bússola. Maxwell escreveu essa equação como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

O que nos leva à forma (4) integral:

$$\oint \nabla \times \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \oint \vec{J} d\vec{S} \quad , \text{ com o teorema}$$

$$\oint \nabla \times \vec{B} d\vec{S} = \oint \vec{B} d\vec{l} \rightarrow \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

já que densidade corrente integrada na área é a própria corrente I .

Porém, Maxwell percebeu que essa forma falha se considerarmos um circuito com um capacitor e posicionarmos a área S de cálculo entre as placas do capacitor.

Assim, Maxwell adicionou uma correção que garante a circulação de $\vec{B}$ nesse caso. Ele notou que a variação de campo $\vec{E}$ no capacitor é o responsável pela existência de campo $\vec{B}$ nessa região. De modo que a forma definitiva é

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

ou na forma integral:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

(3)



Ondas eletromagnéticas

Até o momento da composição das equações de Maxwell não se sabia com certeza se a luz era uma onda eletromagnética. Maxwell mostrou isso de modo inequívoco.

Para isso consideramos as equações lineares de campos ou correntes:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{fazendo } \nabla \times (\nabla \times \vec{E})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad \text{onde sabemos que}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$$

Agora, com a identidade do rotacional e com $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, teremos

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{que é uma equação de onda onde } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Portanto Maxwell mostrou que os campos elétricos e magnéticos, caso fossemos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad \text{se propagam com velocidade } c \text{ onde } c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$$

Também é possível obter para as equações de Maxwell carregadas, o princípio da conservação dos cargas. Tomando:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \cdot \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, ~~(0)~~ temos

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Isso nos indica que se}$$

há surgimento de corrente, há variação na quantidade de cargas temporalmente.

Solução Semelhante para a Equação de onda

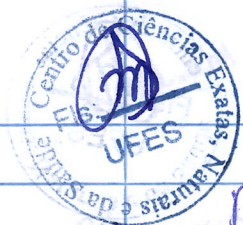
A equação de onda para o campo elétrico possui como solução a função:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Com o caso particular de propagação ao longo de $\hat{y}$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{y}$$

Esse caso será relevante em breve. Antes, consideremos a direção de propagação geral $\vec{k}$



Das equações de Maxwell sem cargas (ou fontes) e correntes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot [\vec{E}_0 \cos(\vec{K}\vec{r} - \omega t)] = 0$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{K} \cos(\vec{K}\vec{r} - \omega t) = 0 \rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{K}$$

para qualquer $\vec{E}_0$. Ou seja, $\vec{K} \perp \vec{E}$.

Agora, mais especificamente para o caso de propagação em $\hat{x}$, sabemos que $\vec{E} \perp \hat{x}$, assim

$\vec{K} \cdot \vec{r} = Kx$ ~~(Kx)~~ com o eixo escolhido adequadamente:

$$\vec{E} = E_0 \cos(Kx - \omega t) \hat{y}$$

Mas ~~($\vec{E} = E_0 \cos(Kx - \omega t) \hat{y}$)~~ $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \cos(Kx - \omega t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -E_0 \cos(Kx - \omega t) K \hat{z}$$

$$- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 K \cos(Kx - \omega t) \hat{z}, \text{ agora integrando no}$$

tempo:

$$\vec{B} = E_0 \frac{K}{\omega} \cos(Kx - \omega t) \hat{z} \text{ de modo que encontremos: } \vec{B} \perp \vec{E} \perp \vec{K}$$

$$\text{Com } |\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

DQF1042025-23



Teorema de Poynting e a energia da onda Eletromagnética

A partir das equações de Maxwell podemos encontrar a energia da Onda E.M. Inicialmente, vamos considerar o trabalho em uma carga q feita pelo campo elétrico $\vec{E}$:

$$W = \int q \vec{E} d\vec{r} \rightarrow \left(\cancel{Pot = \frac{q \vec{E} d\vec{r}}{\Delta t}} \right) - Pot = \frac{q \vec{E} \cdot \vec{r}}{\Delta t}$$

Se considerarmos a potência por volume:

$$\frac{Pot}{\Delta V} = \frac{q \vec{E} \cdot \vec{r}}{\Delta t \Delta V}, \text{ mas } \frac{q}{\Delta t} = I \text{ então:}$$

$$\frac{Pot}{\Delta V} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{r}}{\Delta V} I = \frac{\vec{E} \cdot \vec{r} \hat{m}}{\Delta V} I, \text{ se tem dimensão}$$

de inverso de área, onde chegamos que

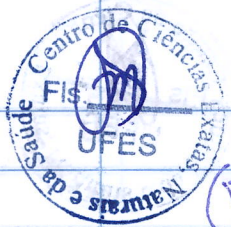
$$\frac{Pot}{\Delta V} = \frac{\vec{E} \cdot I \hat{m}}{S} \text{ como corrente por área é}$$

a densidade de corrente na direção $\hat{m}$ de fluxo da corrente:

$$\frac{Pot}{\Delta V} = \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Agora podemos usar ~~as~~ as equações de Maxwell

(5)



$$(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{2 \partial t} \quad (*) \text{ usando agora a identidade vetorial:}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (**)$$

então substituindo (*) em (**) teremos

$$\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{2 \partial t}$$

$$\text{Usando } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ e que } \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}^2}{2 \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{E} \cdot \vec{J}$$

Onde definimos $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \vec{S}$ que é o vetor de Poynting

temp. Note que o vetor de Poynting tem unidade de energia por tempo por área, isto é, potência por área irradiada pela onda.

Além disso, nota-se que

$\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2$ tem unidade de energia por volume. Denotamos a unidade de energia U



$$\mu = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$$

① vetor de Poynting para uma onda da forma

$$\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{x}$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{y}$$

$$\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{z}$$

Mas como $|\vec{E}| = |\vec{B}|c$ ou $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0} c \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{z}$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0} \frac{1}{c^2} \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{z} = \frac{E_0^2 \epsilon_0 c}{\mu_0} \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \hat{z}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \epsilon_0 c, \text{ onde } \langle \vec{S} \rangle \text{ é a média tempo-} \\ \text{ral em 1 período para a E.M.}$$

É importante notar também que o teorema de Poynting aponta para a conservação da energia em um campo eletromagnético.

Por fim, as ondas eletromagnéticas podem ser polarizadas, isto é, podem ter o campo elétrico e magnético reorientados, isto é, pode ter as direções de propagação filtradas para uma direção específica.



Também é importante destacar que as ondas eletromagnéticas, como construídas por Maxwell não tem variação de energia com o comprimento de onda, dependendo só da amplitude de oscilação.

A quantização proposta posteriormente revelou que

$$E = h\nu, \text{ onde } E \text{ é a energia.}$$

Isso é sabido dado que ondas com raios X são consideravelmente mais energéticas que aquelas de mais baixa frequência.