

(1)



Código: DQF1042025 - 25

As equações de Maxwell podem ser escritas inicialmente na forma integral:

Considerando a Lei de Gauss para o campo elétrico, temos:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ; \text{ onde } q \text{ é a carga envolvida pela superfície } S.$$

Temos também a Lei de Gauss para o campo magnético:

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0$$

essa equação mostra a não existência de monopólos magnéticos

Agora, considerando também a Lei de Ampère:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{env}}$$

onde I_{env} é a corrente envolvida pela superfície C .

Temos também a Lei de Faraday:

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

essa equação mostra que variações no cam-



(1)

po magnético produzem um campo elétrico.

Agora, aplicando o teorema de Gauss e de Stokes podemos reescrever essas equações na forma diferencial.

Temos que a Lei de Gauss para o campo elétrico fica:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

A Lei de Gauss para o campo ~~elétrico~~ magnético fica:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

A Lei de Ampère na forma diferencial fica:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

E a Lei de Faraday pode ser expressa como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Assim como as cargas de polarização produzem um campo elétrico, as ~~cargas~~ correntes de polarização também produzem um campo magnético. Por isso, iremos reescrever a Lei de Ampère.



Definindo corrente de polarização como

$$\vec{j}_p = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{E} \times \nabla \quad \text{I}$$

Logo,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \vec{j}_p = \mu_0 \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{II}$$

Aplicando a equação de Poisson, chegamos a:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

para a Lei de Ampère:

Então, podemos escrever as equações de Maxwell para o vácuo como:

$$\text{IV} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{III} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{I} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{II} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Considerando ainda as equações de Maxwell no vácuo, mas em uma região onde não possuem cargas e nem correntes ($\rho=0$ e $j=0$).



Reescrevendo as equações para essa região:

$$\text{I} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{II} \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{III} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{IV} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Considerando a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Então podemos escrever as equações de Maxwell E, sabendo que o divergente e o rotacional de um campo vetorial $\vec{V}$ pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \hat{x} \frac{\partial v}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Considerando isso, podemos ^{reescrever} as equações de Maxwell para o vácuo em uma região sem cargas e correntes:

(2)



Código: DQF1042025-25

$$I \quad -x \frac{\partial B}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial B}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\hat{x} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \hat{y} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \hat{z} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

$$II \quad -x \frac{\partial E}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial E}{\partial y} = - \left(\hat{x} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \hat{y} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \hat{z} \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

$$III \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

$$IV \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

Considerando que:

$$E_z = B_z = 0$$

Reescrevendo as equações acima e substituindo II em I, chegamos ao sistema de equações abaixo:

$$\frac{\partial E_x^2}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x^2}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial B_y^2}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial B_y^2}{\partial t}$$

verifica-se que as equações acima satisfazem a equação de onda, onde:



(5)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$v \approx 2,99 \times 10^8 \text{ m/s} = c$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo.

O par de equações acima representam ondas transversais, em que:

$$E \perp B$$

$$E \perp B \perp K \text{ (direção de propagação)}$$

A partir dessas análises, Maxwell pôde concluir que a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade igual a c no vácuo.

Sabendo disso, podemos reescrever as equações de Maxwell como:

$$\text{I} \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\text{II} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{III} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{IV} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Sabemos também que:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \times \vec{E}$$

Essa equação mostra que o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$ são perpendiculares entre si.

Além disso, sabemos que a solução para a equação de uma onda eletromagnética pode ser escrita como:

$$f(t) = A \cos(Kz - \omega t + \varphi)$$

Pensando em relação ao campo elétrico e magnético, podemos escrever:

$$E(t) = E_0 \cos(Kx - \omega t + \varphi)$$

e

$$B(t) = B_0 \cos(Kx - \omega t + \varphi)$$