



1. Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações fundamentais da eletrodinâmica clássica os quais descrevem a dinâmica dos campos elétricos e magnéticos tanto na presença quanto na ausência de cargas e correntes elétricas. A seguir descrevemos essas equações com suas formas integrais e diferenciais.

1.1 Lei de Gauss

Essa lei nos diz que o fluxo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional a carga elétrica total dentro dessa superfície.

Em termos matemáticos, temos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

onde a constante de proporcionalidade ϵ_0 é chamada de "permissividade elétrica no vácuo". Se representarmos a carga total em termos de densidade de cargas ρ , e fazendo uso do Teorema da Divergência $\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\tau$, temos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

$$\therefore \oint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2)$$

A equação (1.2) é a representação diferencial da lei de Gauss.

1.2 Lei de Faraday

Essa lei nos diz que variações de fluxos magnéticos através de circuitos fechados (por exemplo, fios condutores em espiras) produzem força eletromotriz em torno desses circuitos. Em termos matemáticos temos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1.3)$$

onde Φ_B é o fluxo magnético através de uma área A circundada por C , ou seja,

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad (1.4)$$



Da mesma forma que a lei de Gauss, podemos também expressar a lei de Faraday em forma diferencial. Para isso faremos uso do Teorema de Stokes $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

$$\therefore \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \quad (1.5)$$

1.3 Lei de Gauss (Magnetismo)

Essa lei descreve que qualquer fluxo magnético através de superfícies fechadas é sempre nula como consequência de que na natureza não existem cargas magnéticas (monopólos) isolados. Em termos matemáticos, temos que:

$$\left[\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \right] \quad (1.6)$$

A forma diferencial desta equação surge naturalmente com o auxílio do Teorema da Divergência:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, d\tau = 0$$

$$\therefore \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \right] \quad (1.7)$$

1.4 Lei de Ampere-Maxwell

Essa lei trata da produção de campos magnéticos por correntes elétricas e por variações de fluxos elétricos. Matematicamente temos que:

$$\left[\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right] \quad (1.8)$$

onde I é a corrente elétrica, Φ_E é o fluxo elétrico e a constante de proporcionalidade μ_0 é chamada de "permeabilidade magnética no vácuo".

Sua forma diferencial é obtida usando os Teoremas de Stokes e representando a corrente I em termos de densidades de correntes $\vec{j}$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$$\therefore \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad (1.9)$$

Assim temos as equações de Maxwell:

$$\left[\begin{array}{ll} \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} & \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} & \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \end{array} \right]$$

e na forma diferencial:

$$\left[\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right]$$

2. Ondas Eletromagnéticas

Elas surgem naturalmente das equações de Maxwell.

Aplicando o rotacional na lei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Desprezando as ~~mas~~ cargas/correntes elétricas:

$$-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = 0 \Rightarrow \square \vec{E} = 0$$

O mesmo aplicando o rotacional na lei de Ampere-Maxwell

$$-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{B} = 0 \Rightarrow \square \vec{B} = 0$$

Ordenamos soluções em ondas planas

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$