



• Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

As equações de Maxwell são um conjunto de quatro equações que juntas são capazes de descrever os fenômenos do eletromagnetismo, tanto os fenômenos estáticos quanto os dinâmicos. O eletromagnetismo, como teoria, foi construído a partir de experimentos e de fenômenos observados a partir destes. ~~Um dos primeiros a descrever um fenômeno eletrostático~~ Um dos primeiros a descrever um fenômeno eletrostático foi Coulomb com a construção da balança de torção. O aparato experimental era formado por uma haste rígida, onde nas suas extremidades estavam presas duas esferas rígidas de metal, e a haste estava suspensa por uma linha. Ao carregar uma das esferas, por exemplo via atrito, e ao aproximar uma outra esfera, ~~também carregada~~, desta esfera Coulomb notou que as mesmas se afastavam uma das outras. Este efeito conhecido como repulsão eletrostática (cargas de mesmo sinal, se repelem). Além disso, Coulomb notou que quanto ~~menor era a força eletrostática de repulsão~~ mais perto a esfera era colocada a esfera presa, mais a haste rígida girava. Dessa forma, Coulomb foi capaz de medir o ângulo devido ao ~~dup~~ giro da haste para cada uma das distâncias entre as duas esferas e constatou que a força eletrostática, devida ~~à~~ a interação entre as cargas ~~é~~ responsável pelo giro da haste rígida, era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Este resultado era análogo ao já conhecida lei da gravitação universal, onde a força gravitacional também ~~é~~ é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Assim, Coulomb foi capaz de escrever que o módulo da força eletrostática de uma carga de teste, q , e ~~uma~~ um conjunto de cargas pontuais, $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_N\}$ é dado por:

$$F_q = q \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}, \text{ onde } r_i \text{ é a distância entre a}$$

carga de teste e i -ésima carga do conjunto e foi usado o princípio de superposição (a interação de cada uma das i -ésimas cargas é ~~considerada~~ superposta).

O termo $\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$ foi denominado de campo elétrico. A

princípio o campo elétrico $\vec{E}$ foi associado a interação com o meio chamado de éter (a ideia de que o vazio era composto por uma quantidade chamada de éter que permeava todo o universo). Entretanto, após o experimento de Michelson-Morley (onde um feixe de luz foi dividido e os dois ~~atravessavam~~ percorriam caminhos diferentes e depois se ~~encontra~~ encontravam num ponto formando um padrão de interferência) que não foi constatado qualquer movimento relativo entre a Terra e esse referencial absoluto éter (já que não foi detectado nenhum deslocamento do padrão de interferência), a ideia do éter foi descartada. ~~Uma das leis de~~

Uma das leis de Maxwell é conhecida como a lei de Gauss, onde se relaciona o campo elétrico $\vec{E}$ com a distribuição de carga que gera tal campo. Essa ~~na~~ famosa lei é definida por $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$, onde ρ é a densidade volumétrica de cargas livres. ~~A~~ A lei de Gauss surge ao se calcular o fluxo do campo elétrico de uma carga pontual sobre uma superfície esférica. Sua interpretação física nos diz que a fonte do campo elétrico é ρ , isto é, sem cargas elétricas não há campo elétrico. ~~A~~ A aplicação da lei de Gauss nos permite computar o campo elétrico para diversas distribuições de cargas de forma bem prática e rápida, já que a na sua forma integral é definida por $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} / \epsilon_0$ o que ~~na prática~~ simplifica o cálculo de $\vec{E}$ apenas para a resolução de uma integral. Entretanto, chamo a atenção ao fato de que a resolução dessa integral se torna fácil apenas em situações físicas de simetria. ~~na prática~~

A segunda lei de Maxwell é definida por $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, ela nos diz que, ~~desprezando o campo elétrico~~ o campo



~~magntico~~ a variação nas linhas de campo é oposta a corrente produzida, ou seja, ela resiste ao movimento. ~~Comparando com a lei de Gauss, podemos perceber que enquanto a lei de Gauss estabelece uma dependência temporal com o campo elétrico, a lei de~~

A última lei de Maxwell que falta descrever é a lei de Ampère - Maxwell, que é uma extensão da lei de Ampère definida por $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Uma diferença notória entre o campo elétrico e o campo magnético é que para que o campo magnético possa existir a carga elétrica precisa estar em movimento (isto é a velocidade não pode ser nula). Assim sendo, a lei de Ampère evidenciava essa falta já que para que o campo magnético possa existir ~~para~~ a densidade superficial de corrente $\vec{J}$ deve ser diferente de zero, mais precisamente: é o movimento das cargas elétricas que produzem uma corrente elétrica, esta associada a $\vec{J}$, e definida pela variação temporal das cargas, $i = dq/dt$, que gera o campo magnético. Historicamente a lei de Ampère foi ~~em~~ amplamente utilizada para computar o campo magnético de problemas onde o campo elétrico não variava com o tempo, já que quando escrita na sua forma integral

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}}_{=I_{en}}$$

era reduzida ao cálculo de uma integral de linha fechada. O problema surgiu quando a mesma foi utilizada para descrever o caso em que o campo elétrico ~~o campo elétrico varia com o tempo~~ do carregamento de um capacitor. Nesse experimento temos um capacitor composto por duas placas paralelas ligadas a uma fonte que alimenta a corrente que atravessa as placas. Como a ~~densidade da corrente elétrica produzirá um~~ Pela lei de Ampère, a presença da corrente elétrica produzirá



um campo ~~el~~ magnético $\vec{B}$ no sistema e podemos usar a mesma para computar $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1)$$

Por outro lado, como o capacitor está carregando sabemos que entre as duas placas $\partial \rho / \partial t > 0$, o que pela equação da continuidade (conservação de cargas) temos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\partial \rho / \partial t \neq 0$ (2). Voltando a lei de Ampère (eq. 1) e tomando o divergente em ambos os lados da equação chegamos a

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (3)$$

o que claramente divergente com a equação da continuidade (eq. 2). Em meio a solucionar tal contradição, Maxwell adicionou o termo conhecido como corrente de deslocamento, $\mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$, na equação de Ampère de modo que a forma final é definida por:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

que é conhecida como a lei de Ampère-Maxwell. O termo de corrente de deslocamento nos diz que um campo elétrico variável no tempo é capaz de produzir um campo magnético (de forma análoga ao que conhecemos pela lei de Faraday, mas de maneira inversa). Voltando ao exemplo do carregamento do capacitor podemos agora resolver computar o campo magnético utilizando a lei de Ampère-Maxwell de escolhendo duas diferentes superfícies:

(1) obtendo uma superfície que atravessa a corrente, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{J} \quad (\partial \vec{E} / \partial t = \vec{0})$$

(2) obtendo uma superfície que passe pelo dos capacitores, assim

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\partial t} \quad (\vec{J} = \vec{0})$$

Ambas escolhas levaram ao mesmo resultado de $\vec{B}$, já que a



corrente que atravessa o fio é a mesma que carrega os capacitores, de modo que $\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$, sem nenhuma

inconsistência no resultado final.

O conjunto das quatro leis de Maxwell ~~em~~ é

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t \end{cases}$$

e descreve os fenômenos eletromagnéticos apenas adotando como fontes cargas livres (i.e. aquelas que estão fora de um material dielétrico). Esse conjunto de equações no vácuo é reduzido a

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (4) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (5) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t & (6) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t & (7) \end{cases}$$

onde tomando o divergente das eqs. (6) e (7) e posteriormente utilizando os resultados das eqs. (4) e (5) podem ser reduzidas a:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} & (8) \\ \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} & (9) \end{cases}$$

que são as famosas equações da onda eletromagnética. Essas equações possuem soluções de ondas planas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \hat{z} \quad (10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \hat{y} \quad (11)$$

onde escolhemos representar a propagação da onda eletromagnética

na direção do eixo $-z$ (direção do vetor $\hat{n}$). As eqs (4) e (5) mostram diretamente a propriedade de que:

$$\vec{B}, \vec{E} \perp \vec{k},$$

ou seja, o campo elétrico e magnético são sempre perpendiculares à direção de propagação da onda eletromagnética produzida por uma das correntes. Embora já utilizado nas eqs. (8) e (9), vale a pena mencionar que $\vec{E} \perp \vec{B}$ (vinda das eqs. (6-7)). Outra propriedade ~~importante~~ importante é que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão em fase, ou seja, os máximos e mínimos de suas funções sempre ocorrem no mesmo instante de tempo.

Ademais, uma das propriedades mais importantes e que surge de forma ~~em~~ direta das equações de onda (8-9) é o fato que a onda eletromagnética se propaga com velocidade constante e igual a $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Isto nos diz que a velocidade de propagação só depende das ~~propriedades~~ características do meio através de μ_0 e ϵ_0 . Este foi um resultado fundamental para a construção da relatividade restrita que postulou que as leis físicas são iguais para todos os referenciais inerciais e impôs a velocidade da luz como a máxima velocidade (isto é, nenhum objeto pode ter velocidade maior que $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ sendo esta velocidade medida em relação a um referencial inercial).

As equações de onda definidas nas equações 8 e 9 são válidas apenas na ausência de cargas e correntes e para um meio material (como os ~~condutores~~ dielétricos). Quando esses fatores são incluídos as equações ~~podem~~ deixam de ser homogêneas e surgem termos associados a cargas e emissão de radiação, além da presença do meio material alterar a velocidade de propagação já que neste contexto $v = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$, onde μ e ϵ depende do material em questão.



O entendimento da luz como onda eletromagnética ~~que~~ que se propaga no vácuo (sem qualquer necessidade de um meio material, como o éter) foi revolucionário para a física, trazendo avanços na área de tecnologia através de emissão de sinal (rádio, televisão, GPS, etc), astronomia via decomposição da luz no seu espectro ~~per~~ permitindo entender diversos processos de aquecimento/resfriamento das estrelas e produções de jatos, ~~emissão~~ ~~transições~~ pulsares e supernovas em todo o espectro da luz. Ademais a teoria ~~ondulatória~~ ^{inicial} ondulatória também serviu como base para o desenvolvimento da teoria quântica, e ~~que a luz é composta por partículas chamadas fótons~~ com as ondas de de Broglie.