



Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

Sumário

Introdução

1

Equações de Maxwell

2

Lei Ampere - Maxwell

4

Ondas Eletromagnéticas no vácuo

5

Ondas Eletromagnéticas com fontes

6

Ondas Planas

6

Teorema de Poynting

8

Conclusão

10

Equações de Maxwell e Ondas Eletromagnéticas

A teoria eletromagnética foi uma grande revolução para o conhecimento tecnológico do nosso dia a dia, observamos sua aplicação desde fenômenos cotidianos, ao utilizar aparelhos eletrônicos, como TV, rádio, etc. Até em pesquisas de alto nível, como a holografia, ou o pinçamento de partículas com um laser fortemente focalizado.

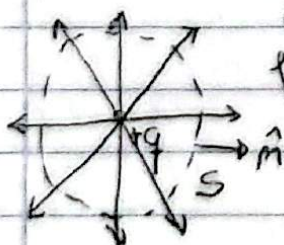
A sua dedução ocorreu durante o século XIX pelo cientista James Maxwell, onde unificou as quatro equações do eletromagnetismo e obteve a equação da onda eletromagnética, que possui a velocidade da luz no vácuo, posteriormente sua teoria foi confirmada por Hertz experimentalmente.

Vamos deduzir a equação da onda eletromagnética, mas primeiramente quero te apresentar as equações de Maxwell, da onda surge a teoria.

A primeira equação é a Lei de Gauss, matematicamente descrita como

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

O que ela descreve é que se embucharmos uma carga elétrica com uma superfície fechada S , podemos obter o campo elétrico $\vec{E}$ que sai por esta carga, como ilustrado na Figura 1. Utilizando o teorema da divergência, podemos escrever a equação (1) como a forma local: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, (2)



note que o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ mede a divergência do campo elétrico e ρ é a densidade de cargas.

Figura 1

Se $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ for uma grandeza positiva significa que possui cargas positivas dentro da superfície S , se for uma grandeza negativa, terá cargas negativas e as linhas do campo estarão apontando para dentro da superfície.

Quando não há cargas elétricas que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ dentro da superfície S não há cargas ou o somatório das cargas é zero.

A equação de Gauss (Lei de Gauss) é aplicada em situações que possuem simetria, por exemplo, uma carga elétrica que possui simetria esférica; um plano infinito que possui simetria plana e um cilindro que possui simetria axial.

A segunda equação de Maxwell é a Lei de Gauss do magnetismo, expressa como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

O significado dela é direto: não existe monopólio magnético! De fato, até agora ainda não foi encontrado. Podemos visualizar esta equação pelas linhas de campo magnético gerado por um ímã (Figura 2).

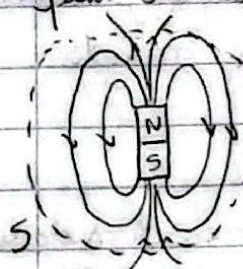


Figura 2

Observe que as linhas de campo saem por uma extremidade e se encontram na outra, possuem linhas de campo fechadas. Portanto ao envolver o ímã com uma superfície S fechada, significa que todas as linhas de campo que saem da superfície, entram também nela, implicando que a divergência é nula.

Existem grupos de pesquisas em busca de monopólio magnético, se for encontrado, a Teoria de Maxwell será revista.

Vamos descrever a terceira equação do grupo das equações de Maxwell, a Lei de Faraday;

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Faraday observou que a variação do campo magnético no tempo gera um campo elétrico. Experimentalmente, foi enrolado um fio condutor em formato de solenoide, e foi aproximando um ímã dentro do solenoide, ao aproximar e afastar o ímã do solenoide foi medida uma corrente no fio (Figura 3)

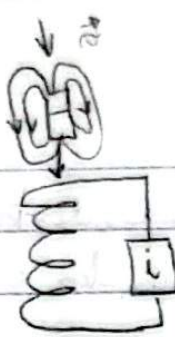


Figura 3.

Note, que quando o ímã estava parado, nenhum campo elétrico era detectado.

A quarta equação de Maxwell é a Lei de Ampere-Maxwell, descrita na equação (5)

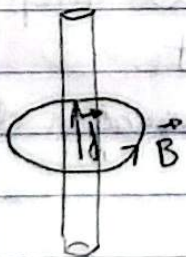
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5)$$

Aqui notamos que o campo elétrico é gerado em duas situações. A primeira é devida a densidade de corrente no fio, e a segunda contribuição é devida a variação no tempo do campo elétrico magnético. O segundo termo foi incluído por Maxwell para que a equação da conservação da carga seja mantida.

Ampere obtive que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6)$$

ou seja, quando um fio condutor transportava uma densidade de corrente, ele gerava um campo magnético que era circular ao fio, como ilustrado na Figura 4. A direção e sentido do campo magnético pode ser obtido usando a regra da mão direita, onde o polegar indica o sentido da corrente, e os outros dedos o campo magnético.



Aplicando o divergente na equação 6, encontramos

Figura 4

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (*)$$

porém $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, o que implica que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

O divergente de uma densidade não pode ser zero, pois, temos da equação de conservação da carga que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8)$$

E ao carregarmos um capacitor, por exemplo, temos uma variação



da densidade de carga que gera a divergência da densidade de corrente.

Para corrigir a equação 6, Maxwell incluiu o termo $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$.

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{\partial t} \quad (9)$$

onde $0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$. Note que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, da Lei de Gauss, e (9) fica

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\left| \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right| \quad (10)$$

Em que foi recuperada a equação da conservação da carga.

Encontramos as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{Lei de Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss para o magnetismo})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell})$$

Podemos unificar estas equações para encontrar a equação das ondas eletromagnéticas. Já aplicamos o rotacional na Lei de Faraday, temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}{\partial t}$$

semos trabalhar no vácuo, onde não há fonte de carga e nem densidade de corrente. Portanto

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \text{ fazendo } v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Encontramos a equação das ondas para o campo elétrico.



$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (11)$$

Aplicando o rotacional nas leis de Ampère-Maxwell, encontramos a equação de onda para o campo magnético

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (12)$$

provando que o campo elétrico e magnético variam no vácuo com uma velocidade v .

Se ao invés de deduzirmos as equações no vácuo, mostrarmos com as fontes de carga e corrente, a equação de onda fica:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot (\vec{\rho}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \right) \quad (13)$$

Em que $\nabla \cdot \vec{\rho}$ descreve a distribuição das cargas no espaço e

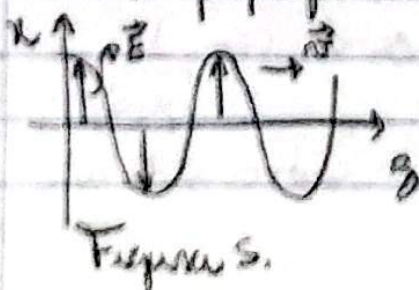
$\frac{\partial}{\partial t} \vec{j}$ está relacionado a radiação emitida pelos corpos.

Ondas Planas

Seamos relembrar a equação (11) em que a solução é uma onda plana descrita como:

$$\vec{E} = \text{Re} [E_0 e^{i(Kz - \omega t)}] \hat{n} \quad (14)$$

observa que o campo elétrico está na direção $\hat{n}$, enquanto a onda se propaga na direção $\hat{z}$ (Figura 5)



Usando a identidade de Euler, escrevemos

$$\vec{E} = E_0 \cos(Kz - \omega t) \hat{n}$$

Aplicando na equação 11, temos

$$\frac{\partial E}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial E}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial E}{\partial z} \hat{k} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

reduzindo, encontramos

$$\frac{\omega}{k} = c$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \text{ o que prova que o } \vec{E} \text{ é}$$

uma onda de frequência angular ω e número de ondas k , que propaga na direção $\hat{i}$.

Para encontrar a direção do campo magnético, utilizamos a equação de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{i} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{j} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{k}$$

Logo

$$+ \frac{\partial B_y}{\partial t} = + E_0 k \cos(-\omega t + k_z) \hat{j}$$

$$\text{Portanto } \boxed{\vec{B} = B_0 \cos(k_z - \omega t) \hat{j}} \quad (15)$$

Note que o campo magnético está na direção $\hat{j}$ e sua onda se propaga na direção $\hat{k}$, podemos escrever como

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}} \quad (16)$$

A Figura 6 ilustra a propagação da onda eletromagnética.

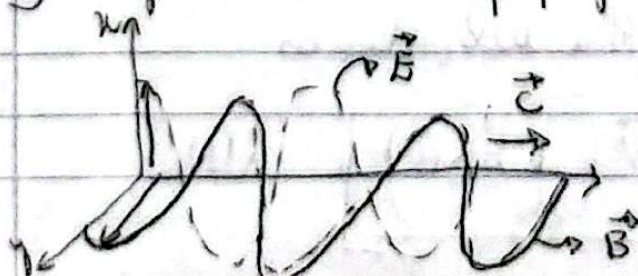


Figura 6



Algumas características das ondas eletromagnéticas

- O campo elétrico e magnético existem juntos
- Eles são perpendiculares entre si.
- A amplitude do campo magnético é menor que do campo elétrico dividido por um fator c , que c é a velocidade da luz.
- A velocidade da variação de onda eletromagnética c é perpendicular ao campo.

Lei de Poynting

Quando seguimos uma lâmpada, instantaneamente ela acende, mas sabemos que a velocidade dos portadores de carga não é o suficiente para que o elétron vá de uma extremidade a outra na lâmpada de tão instantaneamente. Nota-se pois sabemos que o vetor de Poynting que está relacionado com o fluxo de energia que é o responsável desta fenômeno.

Sabemos que o campo elétrico e magnético armazenam energia. Vamos para equação:

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

a variação da energia no tempo é:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E \frac{dE}{dt} + \frac{1}{\mu_0} B \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E \frac{dE}{dt} + \frac{1}{\mu_0} B \frac{dB}{dt}$$

utilizando as equações de Maxwell, temos

$$\left[\frac{-\partial U}{\partial t} = (\vec{j} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) \right] \quad (14)$$



O termo $\vec{j} \cdot \vec{E}$ está relacionado com o trabalho que o campo elétrico exerce sobre a corrente de carga.

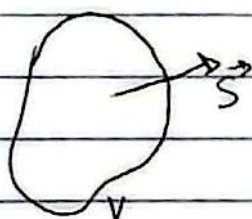
Enquanto $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)$ é o fluxo de energia em uma superfície. Definimos o vetor de Poynting como $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$.

De modo que 17 fica

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = (\vec{j} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (18)$$

utilizando o teorema das divergências em uma superfície S que envolve um volume V , temos que 18 fica

$$\int -\frac{\partial U}{\partial t} dv = \int (\vec{j} \cdot \vec{E}) dv + \int \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dv$$



Notamos que se o vetor de Poynting está apontando para fora da superfície, temos uma divergência da energia naquela local. (Figura 7)

Figura 7.

A conservação de energia como se o trabalho exercido sobre a corrente de carga for zero, ou seja, quando a corrente de carga for zero ($\vec{j} = 0$). Então

$$\boxed{-\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S}} \quad (19)$$

Portanto, notamos que quem carrega a informação de que a lâmpada foi acendida é o fluxo de energia (vetor de Poynting)

Conclusão



Maxwell com um conjunto de quatro equações conseguiu unificar o eletromagnetismo, que foi confirmado por Hertz ao utilizar um transmissor de faíscas e um receptor no formato de um ~~coaxial~~ anel, ele detectou o fenômeno de interferência e reflexo. Comprovando a teoria que de o campo elétrico e magnético são ondas eletromagnéticas que se propagam mutuamente.

A aplicabilidade desta teoria está no nosso cotidiano, desde as ondas de rádio até a luz do ~~Sol~~ Sol que chega até nosso planeta.

Assim o conhecimento aprofundado da teoria continua em ~~desenvolvimento~~ desenvolvimento, buscando sempre melhores aplicações.