

1



DQF 1042025-42

Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

A eletricidade e o magnetismo são estudados desde a Grécia antiga. Toda a teoria física foi construída ao longo dos séculos, por grandes nomes como, por exemplo, Coulomb, Ampère, Faraday, entre outros. Entretanto, um físico e matemático chamado James Clerk Maxwell, forneceu uma contribuição notável para a eletricidade e o magnetismo. Maxwell unificou a eletricidade e o magnetismo em quatro equações. A primeira equação de Maxwell é apresentada na equação 1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

onde $\vec{E}$, ρ e ϵ_0 significam campo elétrico, densidade de carga e a permissividade elétrica no vácuo. Esta equação afirma que a divergência do campo elétrico $\vec{E}$, num ponto, no espaço, é proporcional à densidade de carga ρ e inversamente proporcional à permissividade elétrica ϵ_0 . As linhas de campo convergem para densidades de carga negativa e divergem para densidades de carga positiva.

A equação 1, também chamada de equação de Gauss para a eletrostática, pode ser reescrita na forma global integrando-a em um volume V .

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (1a)$$

pelos Teoremas da divergência e $\iiint_V \rho dV = Q$, temos a forma indicada em 1b.



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1b)$$

A segunda equação de Maxwell, chamada de equação de Gauss para o magnetismo, é apresentada em 2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

O termo $\vec{B}$ é a indução magnética. Integrando a equação 2 em um volume V , temos

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV \quad (2a)$$

que, pelo Teorema da divergência equivale a

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2b)$$

Esta equação informa que as linhas que atravessam uma superfície S , saindo, com origem no polo magnético positivo, existem em igual quantidade as linhas de campo gerado pelo polo negativo que estão entrando na superfície S . No fim, o fluxo é igual a zero. Esta equação também indica a inexistência de monopólos magnéticos.

A terceira equação de Maxwell é apresentada em 3

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

Esta equação mostra que a variação Temporal de um campo magnético/indução magnética gera um campo elétrico circular num ponto no espaço. O que acontece é que, se colocarmos um espiral condutora sob a ação de um campo $\vec{B}$, variável no Tempo, surgirá uma corrente elétrica. Tal corrente

circulário no espaço de modo a gerar um campo que se opõe ao campo $\vec{B}$ aplicado, por isso o sinal negativo na equação. O sinal negativo é atribuído à Lei de Lenz e é uma consequência da conservação da energia. Esta equação também explica os processos de indução usados em motores e geradores. A sua forma global é obtida integrando a equação 3 em uma superfície S .

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (3a)$$

Teremos que $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B$ e, pelo Teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (3b)$$

que diz que o campo elétrico $\vec{E}$, contido numa curva C fechada, é proporcional ao negativo da taxa de variação da indução magnética que atravessa a superfície delimitada pela curva C .

A quarta equação de Maxwell, também chamada de Ampère-Maxwell é apresentada em 4.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

onde μ_0 e $\vec{J}$ são a permeabilidade magnética no vácuo e a densidade de corrente, respectivamente. Importante destacar que, o último termo do lado direito da equação foi introduzido por Maxwell. Esse termo é chamado de corrente de deslocamento e foi inserido na equação de Ampère para corrigir uma inconsistência. A Lei de Ampère-Maxwell afirma que um campo magnético induzido por uma corrente elétrica, que varia no tempo, é gerado



por uma corrente elétrica e pela variação temporal de campo elétrico. A sua forma global é dada integralmente a uma superfície S , tal que:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (4a)$$

O termo $\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ é chamado de corrente envolvida I_{env} , $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \phi_e$. Pelo teorema de Stokes, aplicando os dois lados da equação, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{env} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (4b)$$

Para discutir a equivalência mencionada anteriormente, precisamos partir do Lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5)$$

Se aplicarmos o divergente na equação 5, temos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J})$$

O divergente do rotacional de qualquer campo vetorial é nulo, então temos

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (6)$$

Isso só seria possível para o caso de uma corrente estacionária, que não está em questão. Pelo princípio da continuidade devemos ter

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7)$$

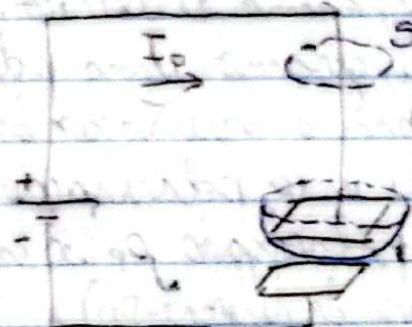
De modo uma corrente saindo de um elemento no topo,

②

DGF1042025-42



a sua densidade de carga deve diminuir. O caso em questão, que podemos discutir a instantânea é o processo de carga e descarga de um capacitor. Considerando o esquema II.



Esquema I: carga e ou

descarga de um capacitor de placas planas e paralelas

Aplicando a Lei de Ampère, na superfície S , temos que I_{env} é igual a I_0 , que é a corrente que flui no circuito. Porém, na superfície S' , $I_{env} = 0$, mas as cargas na placa do capacitor variam. Por isso a equação de continuidade deve ser satisfetida. Então

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8a)$$

Para equação 1, $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, logo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \quad (8b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (8c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (8d)$$



que corrige a inconsistência.

As equações 1, 2, 3 e 4 foram enunciadas considerando o vácuo. Em meios materiais as equações de Maxwell precisam ser modificadas, pois devem levar em conta as cargas livres e efeitos de polarização e magnetização.

Em meios materiais, como dielétricos, quando aplicamos um campo elétrico $\vec{E}$, geramos uma polarização $\vec{P}$ nas cargas, que está relacionada com a orientação das cargas no campo aplicado. Para o caso de uma polarização estática, temos que a densidade de carga polarizada ρ_p é igual ao divergente da polarização $\vec{P}$ (negativo do divergente).

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (9)$$

Para o caso não estático, teremos um fluxo de cargas no material. De a polarização $\vec{P}$ variar, teremos uma densidade de carga ρ_i em uma parte do material e uma densidade de carga $-\rho_i$ na outra extremidade. De $\vec{P}$ aumentar, ρ_i e $-\rho_i$ também vão aumentar, então existirá uma corrente de polarização $\vec{J}_p$, dada por

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (10)$$

No caso de uma magnetização $\vec{M}$ não homogênea no material, surgirá uma corrente de magnetização $\vec{J}_m$, dada por

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (11)$$

A densidade total de cargas, que deverá ser substituída na equação 1, será a soma da densidade de cargas livres ρ_l



com a densidade de cargas polarizadas $\rho_e = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_e$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_e$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_e$$

Onde $\vec{D} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$ é o deslocamento elétrico, tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (12)$$

que diz que a divergência do deslocamento elétrico é igual à densidade de cargas livres.

A densidade de corrente total será a soma das densidades de corrente, tal que

$$\vec{J}_{\text{total}} = \vec{J}_e + \vec{J}_p + \vec{J}_m \quad (13)$$

onde $\vec{J}_e$ é a densidade de corrente das cargas livres. Retornando na equação 4

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_e + \vec{J}_p + \vec{J}_m) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13a)$$

$$\frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13b)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_e + \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \quad (13c)$$

O termo $\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)$ é chamado de campo magnético $\vec{H}$



então,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (13d)$$

A equação 13d diz que um campo magnético $\vec{H}$, circulante num ponto do espaço é gerado por uma corrente de cargas livres e pela variação temporal do deslocamento elétrico.

Um ponto muito importante das equações de Maxwell é que com elas foi possível provar que a luz é uma onda eletromagnética, que se propaga no vácuo, e estimar a sua velocidade. Para obter a equação de onda, podemos aplicar o rotacional na Terceira ou quarta equação de Maxwell. Aqui aplicaremos na Terceira, para simplificar. Então

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (14a)$$

usando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$, temos

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (14b)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 14b é nulo e

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \quad \text{, temos}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \vec{J} - \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \mu_0 \epsilon_0$$

No vácuo não temos cargas, então $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$

③

DQF1042026-42



então

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (15)$$

que é equivalente à equação da onda

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (15a)$$

Comparando as equações 15 com 15a, observamos que a velocidade é igual a $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Portanto

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (16)$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Conhecendo os valores de ϵ_0 e μ_0 , que são $8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ e $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, obtemos um valor para a velocidade da luz no vácuo de $c \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Na equação 16, podemos considerar a função descrita em 17, como solução:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (17)$$

onde $\vec{E}_0$ é um vetor real e constante, $\vec{k}$ é o vetor de onda e indica a direção e sentido de propagação do onda, $\vec{r}$ é o vetor posição e ω é a velocidade angular ou frequência angular. A velocidade da luz c se relaciona com a frequência angular e o vetor de onda, por



meio da relação

$$c = \frac{\omega}{|k|} \quad (17a)$$

No vácuo, ou seja, na ausência de cargas, a primeira equação de Maxwell deverá ser

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (17b)$$

O que significa que, ao aplicar a primeira equação de Maxwell na nossa função, teremos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = k \cdot \vec{E} = 0 \quad (17c)$$

O resultado de 17c só será válido se o vetor de onda $\vec{k}$ for perpendicular ao campo elétrico $\vec{E}$.

De acordo com a terceira equação de Maxwell, teremos

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = k \times \vec{E} \quad (17d)$$

Integrando em relação ao tempo, obtemos

$$\vec{B} = \frac{k \times \vec{E}}{\omega} \quad (17e)$$

como $\omega = c|k|$

$$\vec{B} = \frac{k \times \vec{E}}{c|k|} = \frac{k \times \vec{E}}{c} \quad (17f)$$

O resultado de 17f mostra que $\vec{B}$ e $\vec{E}$ oscilam em fase e, também, que ambos são perpendiculares à dire-



de propagação da onda. O campo magnético possui uma intensidade menor que o campo elétrico, pois B é igual ao campo elétrico multiplicado por um fator $1/c$.

A onda eletromagnética transporta energia e momento. A energia contida na onda, seja a soma das energias dos campos elétrico e magnético. A densidade de energia do campo elétrico u_e é dada por 18.

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (18)$$

e do campo magnético u_m , dada por (19)

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (19)$$

Então $u = u_e + u_m$

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (20)$$

Como $B \equiv \frac{E}{c}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \epsilon_0 E^2 \right) = \epsilon_0 E^2$$

Considerando a parte real da solução considerada em 17

$$u = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(R\hat{r} - \omega t) \quad (20a)$$

Como a energia varia no tempo e no espaço é interessante trabalharmos com o valor médio



como $\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$,

$$\bar{u} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_0^2}{2} \quad (20b)$$

Significa que a densidade de energia de uma onda eletromagnética depende da amplitude do campo elétrico ao quadrado. Este resultado é muito similar ao obtido para um oscilador harmônico simples:

Em alguns casos é interessante conhecer a variação da energia de uma onda eletromagnética, ao atravessar uma área ou superfície. Para obter esta relação vamos considerar a densidade de energia u , com as componentes de campo elétrico e magnético.

$$u = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (21)$$

A Taxa de variação Temporal da energia (densidade) será

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{B} \cdot \partial \vec{B}}{\mu_0 \partial t} \quad (22)$$

Podemos usar as Equações de Maxwell, a Terceira e a quarta, para substituir na equação (22). Considerando a Terceira temos

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (22a)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (22b)$$

(4)

DQF1042025-42



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}}{\mu_0} \quad (22c)$$

O segundo e o Terceiro Termos do lado direito da equação 22c podem ser simplificados de modo que

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) ; \text{ onde } \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \equiv \vec{S}$$

em que $\vec{S}$ é o vetor de Poynting. Reescrevendo a equação 22c, temos

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (23)$$

O vetor de Poynting indica a direção do fluxo de energia e, a sua divergência, mostra esse fluxo por área, que vai de determinado ponto do espaço. O termo $\vec{E} \cdot \vec{J}$ representa a energia dissipada pelo trabalho realizado pelos campos.

Em síntese, as equações de Maxwell unificaram a eletrostática, o magnetismo e a ótica. Elas também serviram como ponto de partida para discussões sobre relatividade.