

Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

As equações de Maxwell são dadas a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday}) \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère ajustada por Maxwell}) \quad (4) \end{array} \right.$$

As equações de (1) a (4) são dadas em sua forma diferencial, porém elas podem ser escritas em forma de integral como a seguir:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (7)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (8)$$

Embora as equações de Maxwell não tenham sido todas formuladas por ele, Maxwell as organizou e estruturou dessa forma, o que ajudou a consolidar o estudo dos fenômenos



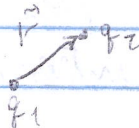
eletromagnéticos

O estudo de fenômenos elétricos e magnéticos ocorre desde que se observa tais fenômenos na natureza; quando observou-se, por exemplo, que determinados objetos eletrificados podiam atrair ou repelir outros objetos eletrificados, ou até mesmo eletrificar alguns objetos com carga líquida neutra.

A essa força que a carga elétrica podia ~~ex~~ exercer se determinou que propagava-se pelo espaço, se enfraquecendo quanto maior fosse essa distância da carga.

Coulomb determinou a lei de forças entre duas cargas com:

$$\vec{F} = K \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$



Sendo r a distância entre as cargas 1 e 2, sendo que uma delas se encontra na origem de um sistema cartesiano e a outra na posição dada pelos coordenados do vetor $\vec{r}$.

Uma carga puntual q mesmo não exercendo força a nenhuma carga líquida puntual ao seu redor ainda possui a influência dessa força elétrica que se propaga no espaço, a essa influência deu-se o nome de campo elétrico ($\vec{E}$)

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (10)$$



A constante K foi dado o valor empiricamente de $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, sendo ϵ_0 o valor da ~~permissiv~~ permissividade.

(2)

densidade elétrica no vácuo.

A carga elétrica líquida em um corpo, de modo geral, é o saldo da quantidade de elétrons total no corpo em relação à quantidade de prótons desse objeto. Se o corpo possui mais elétrons que prótons ele é carregado negativamente, ao contrário, é carregado positivamente.

Se o elétron puder ser considerado uma carga puntual (assim como o próton) pode-se inferir que o corpo carregado tenha sua carga dada soma das cargas puntuais líquidas, de modo a pensar que este corpo possui uma densidade de carga ρ :

$$q = \int_V \rho \, dV \quad (11)$$



Utilizando as equações (10) e (11), Gauss chega a equação (1) e (5):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{r^2}{r^2} d\Omega d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Usando a lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11)$$



A lei de Gauss diz, que todo objeto carregado, seja pontual ou corpóreo, emite campo elétrico perpendicular à sua superfície de entorno.

A segunda equação de Maxwell, as eqs. (2) e (6), são comprovações empíricas de que não existe monopólos magnéticos, uma vez que todo ímã encontrado na natureza possui sempre dois pólos, norte e sul, que nunca podem ser encontrados isoladamente como os cargas positiva e negativa, além de partículas do monopólo ~~não~~ nunca terem sido detectadas.

A lei de indução de Faraday é consequência da lei de Lenz, que estipula que a variação do fluxo de campo magnético na superfície circular de uma espira gera uma corrente elétrica no entorno da espira.



$\Phi_B = \text{fluxo magnético}$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -I$$

$$\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7)$$

Rela lei de Stokes

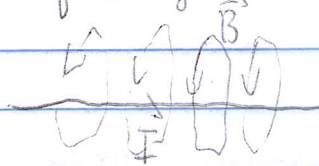
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (12)$$

$$(12) = (7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

(4)

A lei de Ampère se caracteriza por ser, de certa forma, um contraponto a lei de Biot-Savart, pois é o campo elétrico em movimento que gera o campo magnético em seu entorno.



A lei de Ampère diz que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (13)$$

Onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo.
(Que é uma generalização da eq. de Biot-Savart para o caso de um fio reto condutor de corrente elétrica e infinito)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (14)$$

A corrente elétrica pode ser pensada em termos da sua densidade de corrente:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (15)$$

Onde a densidade de corrente $\vec{J}$ caracteriza o fluxo de cargas elétricas que passam pela seção de área do fio condutor por unidade de tempo.



Substituindo (15) em (13) e aplicando a lei de Stokes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (16)$$

A eq. (16) é a forma diferencial da lei de Ampère. A lei de Ampère está incompleta e foi mais tarde complementada por Maxwell.

Aplicando-se o divergente à equação 16

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}$$

$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow$ porém isso contradiz equações da continuidade, uma vez que a corrente elétrica é a variação das cargas no tempo.

$$\frac{dq}{dt} = I \quad (17)$$

$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$ o sinal negativo aqui se dá devido à saída de cargas quando a corrente passa pela seção do fio.

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (18)$$

Equação (18) é eq. da Continuidade

Maxwell viu que poderia resolver o problema do divergente em (16) se acrescentasse um novo termo, usando a eq. de Gauss (1)

$$\frac{\partial (\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0$$

Fazendo a equação de Ampere ter um termo a mais

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

O termo $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ foi batizado de corrente de deslocamento, chamado assim pois é um tipo de corrente comum em circuitos que possuem impedância capacitiva.



Ona eletromagnética no vácuo.

Em um ambiente sem matéria, como o vácuo, não há presença de cargas líquidas, logo considera-se $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$.

As equações de Maxwell ficam:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (20)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (21)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (22)$$

Aplicando o rotacional em 21

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}{\partial t}$$

Por identidade

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (23)$$

A equação (23) é uma equação de onda, caracterizada pela forma $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

Aplicando o rotacional na eq. (22)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \times \vec{E})}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (-\nabla^2 \vec{B})}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (24)$$

A equação (23) caracteriza uma equação de onda para o campo elétrico e a (24) para o campo magnético. A eq. de ondas do tipo tridimensional no espaço $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ se caracteriza por ter a

seguinte tipo de solução:

$$f(x, t) = A \cos(x - vt) \text{ ou } A \sin(x - vt)$$

No caso dos ondas eletromagnéticas, tem-se ondas tridimensionais e vetoriais

~~$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)}$$~~

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)}$$



Onde $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ é a velocidade da luz
no vácuo.

As ondas eletromagnéticas são consequência
das induções mútuas entre os campos elétrico
e magnético, ambos criando indução periódicas
e im pulsos, explicando assim porque as propaga-
ções de ondas eletromagnéticas não precisam
de um meio material para acontecer.